

EXERCICES SUR LA LOI NORMALE

Exercice 1.

Soit Z une V.A. de loi $N(0,1)$.

1°. Calculer: $P(Z < 1.34)$; $P(Z < -1.72)$; $P(Z > 2.41)$; $P(Z > -1.53)$; $P(1.12 < Z < 1.57)$; $P(-0.75 < Z < 0.36)$; $P(|Z| > 1.96)$

2°. Déterminer z tel que:

$$\begin{aligned}P(Z < z) &= 0.683 \\P(Z > z) &= 0.239 \\P(Z < z) &= 0.486 \\P(Z > z) &= 0.812\end{aligned}$$

Exercice 2.

Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. Une étude effectuée auprès d'un millier de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois. La distribution des âges étant normale, on souhaite

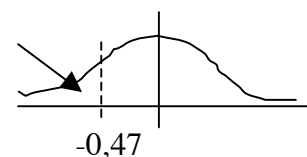
- 1) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois
- 2) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois
- 3) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre 8 mois et 12 mois.

1) Soit X l'âge d'apparition des premiers mots. $X \in N(11,5 ; 3,2)$

On cherche $P(X < 10)$

On opère le changement de variable de X en Z : $z = \frac{(10 - \mu)}{\sigma} = \frac{(10 - 11,5)}{3,2} = -0,47$

On cherche donc $P(Z < -0,47) = 1 - P(Z < 0,47)$
 $= 1 - F(0,47)$
 $= 1 - 0,6808 = 0,3192$



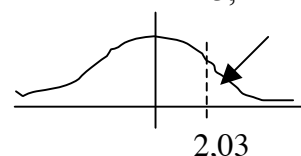
On conclut : 31,92% des enfants acquièrent leur premier mot avant 10 mois

2) On cherche $P(X > 18)$

On opère le changement de variable de X en Z : $z = \frac{(18 - \mu)}{\sigma} = \frac{(18 - 11,5)}{3,2} = 2,03$

On cherche donc $P(Z > 2,03)$

$P(Z > 2,03) = 1 - P(Z < 2,03)$
 $= 1 - F(2,03)$
 $= 1 - 0,9788$
 $= 0,0212$



On conclut : 2,12% des enfants acquièrent leur premier mot après 18 mois

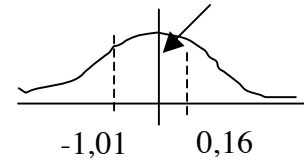
3) On cherche $P(8 < X < 12)$

On opère le changement de variable de X en Z :

$$z_1 = \frac{(8 - \mu)}{\sigma} = \frac{(8 - 11,5)}{3,2} = -1,09 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(12 - \mu)}{\sigma} = \frac{(12 - 11,5)}{3,2} = 0,16$$

On cherche donc $P(-1,09 < Z < 0,16)$

$$\begin{aligned} P(-1,09 < Z < 0,16) &= F(0,16) - F(-1,09) \\ &= (0,16) - [1 - F(-1,09)] \\ &= 0,5636 - 1 + 0,8621 \\ &= 0,4257 \end{aligned}$$



On conclut : 42,57% des enfants acquièrent leur premier mot entre 8 et 12 mois

Exercice 3.

En 1955, Wechler a proposé de mesurer le QI (Quotient Intellectuel) des adultes grâce à deux échelles permettant de mesurer les compétences verbales et les compétences non verbales. On compare le score global de la personne testée avec la distribution des scores obtenu par un échantillon représentatif de la population d'un âge donné, dont les performances suivent une loi normale ayant pour moyenne 100 et pour écart-type 15.

1/ Quel est le pourcentage de personnes dont le QI est inférieur à 80?

2/ Quelle chance a-t-on d'obtenir

un QI compris entre 100 et 110 ?

un QI compris entre 90 et 100 ?

un QI compris entre 105 et 110 ?

3/ Un patient obtenant un score de 69 fait-il partie des 5% inférieur de la distribution ?

4/ En dessous de quel QI se trouve le tiers des individus ?

5/ Quel QI minimum faut-il obtenir pour faire partie des 5% d'individus les plus performants ?

Correction

1. Trouver $P(X < 80)$

transformation de X en Z

$$= P(Z < (80 - 100)/15)$$

$$= P(Z < -1.33)$$

$$= P(Z > 1.33)$$

$$= 1 - F(1.33)$$

$$= 1 - 0.9082$$

$$= 0.0918$$

9.1 % de cette population a moins de 80 de QI

2. Trouver $100 < P(X) < 110$

$$=P(X<110)-P(X<100)$$

100 est la moyenne donc $P(X<100) = 0.5$

$$= F(0.67)-0.5$$

$$= 0.7486-0.5$$

$$= 0.2486$$

24.86 % de la population a un QI compris entre 100 et 110

Trouver $90<P(X)<100$

Inutile de recalculer puisque nous nous trouvons dans une situation de loi normale donc la courbe a pour propriété d'être symétrique. De plus, il y a le même écart entre la moyenne (100) et 110 ou 90.

24.86 % de la population a un QI compris entre 90 et 100

Trouver $105<P(X)<110$

$$= P(X<110)-P(X<105)$$

$$= P(X<110)-P(Z<(105-100)/15)$$

$$= 0.7486 \text{ (déjà calculé)} - P(Z<0.33)$$

$$= 0.7486-0.6293$$

$$= 0.1193$$

11.93 % de la population a un QI compris entre 105 et 110

3. Est ce que 69 appartient aux 5% inférieur de cette population ?

Ceci revient à trouver x ; $P(X<x)=0.05$

Donc z ; $P(Z<z) = 0.05$

Par lecture dans la table; $z = -1.6449$

$$z = (x-100)/15$$

$$(x-100)/15 = -1.6449$$

$$x = 75.33$$

69<75.33 donc un QI de 69 signifie que l'on appartient au 5% inférieur de cette population

3. Quel est le QI du 1/3 inférieur de la population?

Ceci revient à trouver x ? ; $P(X<x)=0.33$ ou z ? ; $P(Z<z) = 0.33$

$$z = -0.4316$$

$$(x-100)/15 = -0.4316$$

$$x = 93.526$$

le tiers inférieur de cette population a un QI maximum de 93

6. Quel est le QI minimum des 5 % supérieurs de cette populations ?

/1

$$z ? ; P(Z<z) = 0.05$$

D'après la question 3, nous savons que

$$z = 1.6449$$

$$z = (x-100)/15$$

$$(x-100)/15 = 1.6449$$

$$x = 124.67$$

le QI minimum des 5% supérieur de cette population est de 124.

Exercice 4.

Une enquête est effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaître leur achat de lait en 1 mois. Sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation de ce produit forme une population gaussienne avec une moyenne de 20L et un écart-type de 6.

En vue d'une conception d'une campagne de pub, on souhaite connaître le pourcentage des faibles consommateurs (c'est-à-dire moins de 10 L/mois) et le pourcentage des grands consommateurs (c'est-à-dire plus de 30 L/mois).

Questions :

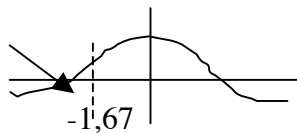
1. Calculer ces 2 pourcentages
2. Au-dessous de quel nombre de litres achetés se trouvent 75% des consommateurs?
3. Combien de litres au maximum consomme la moitié des consommateurs?
4. Au-dessus de quelle consommation se trouve 1/3 de la population ? et 2/3 de la population ?

CORRECTION

1. Calcul des 2 pourcentages

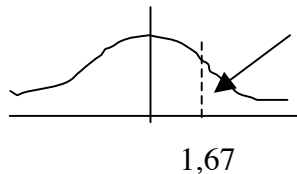
Soit $X \in N(20;6)$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(X < 10) &= P\left(Z < \frac{10-20}{6}\right) \\ &= P(Z < -1,67) \\ &= 1 - F(1,67) \\ &= 1 - 0,9525 \\ &= 0,0475 \end{aligned}$$



4.75% de la population peuvent être considérés comme faibles consommateurs.

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(X > 30) &= P\left(U > \frac{30-20}{6}\right) \\ &= P(Z > 1,67) \\ &= 1 - F(1,67) \\ &= 1 - 0,9525 \\ &= 0,0475 \end{aligned}$$



4.75% de la population peuvent être considérés comme grands consommateurs.

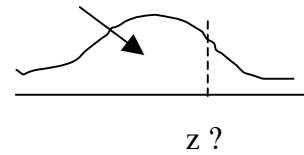
Remarque : les valeurs 10 et 30 ont le même écart à la moyenne, qui est égal à 10. Comme la variable X suit une loi normale, il est logique de retrouver le même pourcentage dans les 2 cas.

2. Soit $X \in N(20;6)$ et soit $U \in N(0;1)$
on cherche x tel que $P(X < x) = 0,75$

on cherche donc u tel que $P(Z < z) = 0,75$

Comme $0,75 > 0,50$, on recherche la valeur de u grâce à Q de la table des correspondances inverses.

Pour $Q = P(Z < z) = 0,75$, on trouve la valeur $z = 0,6745$, et comme $z > 0$, alors $z = 0,6745$.



Calcul de x :

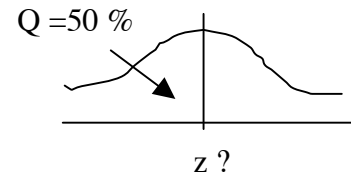
$$X = \mu + z \times \sigma$$

$$X = 20 + 0,6745 \times 6$$

$$X = 24,047$$

75% des consommateurs se trouvent au-dessous de **24L** achetés.

3. La question posée est : combien de litres maximum consomme la moitié des consommateurs. Or, la moitié des consommateurs représentant 50% de la population, il suffit de considérer la valeur en dessous de laquelle on trouve 50% de l'effectif, c'est-à-dire la médiane (cf. sur le schéma en face).



Or, cette valeur correspond à la moyenne, puisque la distribution est normale. Il n'y a donc aucun calcul à faire!

Donc, la moitié des consommateurs consomme **20L** maximum par mois.

4. Soit $X \in N(20;6)$ et soit $U \in N(0;1)$

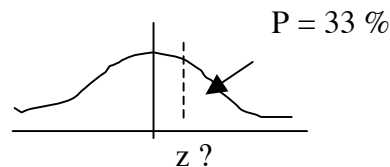
- On considère le 1/3 de la population consommant le + de lait, c'est-à-dire 33.3%.

$$P(X > x) = P(Z > z) = 0,333$$

On cherche à calculer x .

Comme $p = 0,333 < 0,5$ on recherche la valeur de z grâce à P de la table des correspondances inverses.

Pour $P = P(Z > z) = 0.333$, on trouve la valeur $z = 0,4316$ et comme $z > 0$, alors $z = 0,4316$.



Calcul de x :

$$X = \mu + z \times \sigma$$

$$X = 20 + 0,4316 \times 6$$

$$X = 22,5896$$

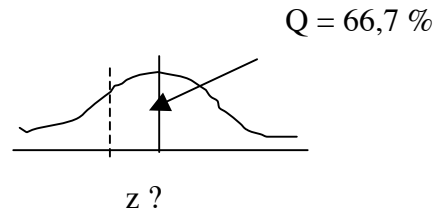
33% des consommateurs se trouvent au-dessus de **22L** achetés.

- On considère les 2/3 de la population consommant le + de lait, c'est-à-dire 66.7%.

$$P(X > x) = P(Z > z) = 0,667$$

On cherche à calculer x .

Comme $0,667 > 0,50$ on recherche la valeur de u grâce à Q de la table des correspondances inverses.
 Pour $Q = P(Z < z) = 0,667$, on trouve la valeur $z = 0,4316$, et comme $z < 0$, alors $z = -0,4316$.



Calcul de x :

$$X = \mu + z \times \sigma$$

$$X = 20 + (-0,4316 \times 6)$$

$$X = 17,4104$$

67% des consommateurs se trouvent au-dessus de 17L achetés.

(On pouvait le calculer directement avec le résultat précédent, puisque rechercher les 67% des plus grands consommateurs revient à rechercher les 33% des moindres consommateurs. On pouvait donc obtenir la valeur de u directement, prendre alors sa valeur négative et opérer la transformation en x).

Exercice 5.

A l'issue des épreuves de vocabulaire que subissent, à la rentrée, tous les élèves de 6^{ème}, on a obtenu une moyenne de 42,34 points (sur 60) assortie d'un écart-type de 18,22. Les scores se répartissent normalement (i. e. selon une loi normale).

- 1) quelle proportion d'élèves ont une note inférieure à 30 ?
- 2) quelle proportion d'élèves ont une note supérieure à 50 ?
- 3) au-dessus de quelle note se situent 80 % des élèves. Et 30 % ?

Auprès d'un échantillon de 103 élèves, on a observé une moyenne de 46,25.

- 4) Calculer l'intervalle de confiance au risque 5% autour de la moyenne théorique (i. e. la moyenne de la population)
- 5) Conclure sur l'appartenance de l'échantillon à la population.

CORRIGE

1) soit X la note obtenue sur 60. $X \in N(42,34 ; 18,22)$

on cherche $P(X < 30)$.

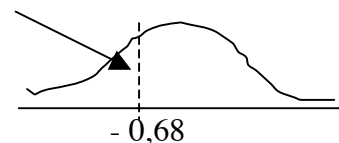
on opère une transformation de x en u :

$$u = (x - \mu) / \sigma = (30 - 42,34) / 18,22 = -12,34 / 18,22 = -0,68$$

on cherche donc $P(Z < -0,68)$

on fait le dessin

on se retrouve dans le cas $P(Z < z) = 1 - P(Z < -z)$



$$\text{donc } P(Z < -0,68) = 1 - P(Z < 0,68)$$

$$= 1 - 0,7417$$

$$= 0,2583$$

on conclut : 25,83% des élèves ont une note inférieure à 30 sur 60.

2) on cherche $P(X > 50)$.

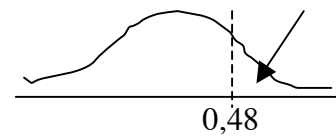
on opère une transformation de x en u :

$$u = (x - \mu) / \sigma = (50 - 42,34) / 18,22 = 8,66 / 18,22 = 0,48$$

on cherche donc $P(Z > 0,48)$

on fait le dessin

on se retrouve dans le cas $P(U > u) = 1 - P(U < u)$



$$\text{donc } P(Z > 0,48) = 1 - P(Z < 0,48)$$

$$= 1 - 0,6844$$

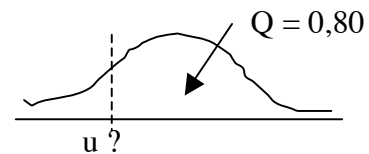
$$= 0,3156$$

on conclut : 31,56% de élèves ont une note supérieure à 50 sur 60.

3) - on cherche x tel que $P(X > x) = 0,80$

on cherche donc u tel que $P(Z > z) = 0,80$

on fait le dessin



on cherche donc $-u$ par Q dans la table des correspondances inverses,

$$-u = 0,8416 \text{ donc } u = -0,8416$$

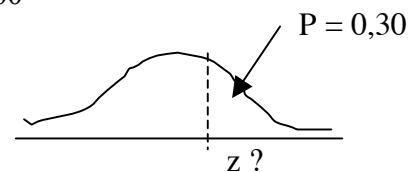
$$\text{on fait la transformation de } u \text{ en } x : x = \sigma \times u + \mu = 18,22 \times -0,8416 + 42,34 = 27$$

on conclut : 80% des élèves ont une note supérieure à 27 sur 60

- on cherche x tel que $P(X > x) = 0,30$

on cherche donc u tel que $P(Z > z) = 0,30$

on fait le dessin



on cherche donc z par P dans la table des correspondances inverses,

$$z = 0,5244$$

$$\text{on fait la transformation de } u \text{ en } x : x = \sigma \times z + \mu = 18,22 \times 0,5244 + 42,34 = 51,89$$

on conclut : 30% des élèves ont une note supérieure à 51,89 sur 60

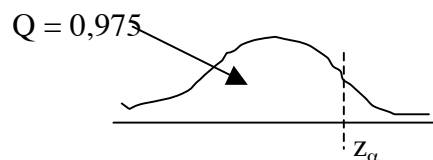
4) on cherche à calculer l'intervalle de confiance au risque $\alpha = 0,05$ avec $\mu = 42,34$, $\sigma = 18,22$ et un échantillon de taille $n = 103$

On cherche d'abord u_α tel que $P(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha/2 = 0,95$

$$\alpha/2 = 1 - 0,95$$

$$\alpha = 0,025$$

Dessin :



On lit $z_\alpha = 1,96$ par Q dans la table des correspondances inverses.

On opère la transformation de u_α en a_α :

$$a_\alpha = z_\alpha \times \sigma / \sqrt{n} = 1,96 \times 18,22 / \sqrt{103} = 35,71 / 10,15 = 3,52$$

donc l'intervalle de confiance au risque 5% de la moyenne théorique est l'intervalle

$$[\mu - 3,52; \mu + 3,52] = [38,82; 45,86]$$

5) la moyenne calculée sur l'échantillon (46, 25) n'appartient pas à l'intervalle de confiance au risque 5% :

on conclut : on peut affirmer avec 5% de chance de faire erreur, que l'échantillon étudié n'a pas une moyenne comparable à celle de la population.

Remarque : On peut se demander pourquoi cette moyenne est aussi différente: n'y aurait-il pas l'influence d'une variable non contrôlée, d'une erreur de mesure... ou encore d'un facteur particulier faisant que l'échantillon n'est pas représentatif de la population dont on croit qu'il est issu ?